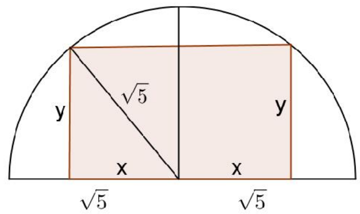
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

[2'5 puntos] Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

Solución

Es un problema de optimización



Función a optimizar: Perimetro = x + x + y + x + x + y = 4x + 2y

Relación entre las variables: hipotenusa triángulo rectángulo $\rightarrow x^2 + y^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$, $y = +\sqrt{5 - x^2}$, es positivo porque es una longitud.

$A(x) = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}$. (Si A'(b) = 0 y A''(b) < 0, x = b es un máximo de A(x)).

$A(x) = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}$; $A'(x) = 4 + 2\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = 4 - \dfrac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}$.

De A'(x) = 0, tenemos $4 - \dfrac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$, es decir $4 = \dfrac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}$, por tanto $4\cdot\sqrt{5 - x^2} = 2x$. Elevando al cuadrado tenemos $16(5 - x^2) = 4x^2 \rightarrow 80 - 16x^2 = 4x^2 \rightarrow 80 = 20x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 4$. Sólo vale la solución positiva **x = 2** (es una longitud).

Es decir **las dimensiones del rectángulo son 2x = 4 cm., y =** $\sqrt{5 - (2)^2}$ **= 1 cm.**

Veamos para terminar que es un máximo, es decir A''(2) < 0

$$A'(x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}; \quad A''(x) = -\frac{2\sqrt{5-x^2} - 2x.\dfrac{-2x}{2.\sqrt{5-x^2}}}{(\sqrt{5-x^2})^2} = -\frac{2\sqrt{5-x^2} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{5-x^2}}}{(\sqrt{5-x^2})^2}, \text{ de donde}$$

$$A''(2) = -\frac{2\sqrt{1} + \dfrac{2(1)^2}{\sqrt{1}}}{(\sqrt{1})^2} = -4 < 0, \text{ luego es un máximo.}$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

[2'5 puntos] Hallar $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$. *Sugerencia*: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución

Hallar $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$. *Sugerencia*: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

$I = \displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$. Nos dan el cambio $t = \sqrt{x}$, es decir $t^2 = x$, luego $2t\cdot dt = dx$, y sustituyendo nos queda:

$I = \displaystyle\int \frac{1 + t^2}{1 + t}2tdt = \int \frac{2t^3 + 2t}{1 + t}dt$, que es una integral racional. Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador si hiciese falta.

$$\begin{array}{rr|l}
2t^3 & +\ 2t & t + 1 \\ \cline{3-3}
-2t^3 - 2t^2 & & 2t^2 - 2t + 4 \\ \hline
-\ 2t^2 & +\ 2t & \\
2t^2 & +\ 2t & \\ \hline
 & 4t & \\
 & -4t - 4 & \\ \hline
 & -\ 4 &
\end{array}$$

Recordamos que G(x) = ∫((C(t)) + R(t)/(div(t))dt = ∫ $(2t^2 - 2t + 4)dt + \int \frac{-4}{t+1}dt$ =

= $2t^3/3 - t^2 + 4t - 4\cdot\ln|t+1| + K$ = {quito el cambio $t = \sqrt{x}$ } = $\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} - x + 4\cdot\sqrt{x} - 4\cdot\ln|\sqrt{x} + 1| + K$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x - y + z = 0$$
$$2x + 3y - z = 3$$

a) [1'5 puntos] Determina el valor de m para el que al añadir la ecuación $x + my + 4z = -3$ al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.

b) [1 punto] Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x - y + z = 0$$
$$2x + 3y - z = 3$$

a)

Determina el valor de m para el que al añadir la ecuación $x + my + 4z = -3$ al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.

Como el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$, es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Para el que al añadir la ecuación, $x + my + 4z = -3$, al sistema anterior, es decir $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + my + 4z = -3 \end{cases}$, se obtenga un sistema con las mismas soluciones, la matriz de los coeficientes A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada A^* = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & m & 4 & -3 \end{pmatrix}$, tienen que tener rango 2.

A tiene rango 2 si det(A) = 0 = |A| = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix}$ = 3(12+m) – 2(9) = 18 + 3m. De la ecuación 18 + 3m = 0, tenemos **m = - 6.**

Si m = - 6, rango(A) = 2.

Si m = -6, la matriz ampliada es A^* = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$,

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix}$ = 1(9) – (-1)(-9) = 0, luego **rango(A*) = 2.**

Tomando **m = -6, rango(A) = rango(A^*) = 2,** el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$ y el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + my + 4z = -3 \end{cases}$ **tienen las mismas soluciones.**

b)

Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6 (x+y+z=6).

Me están pidiendo que resuelva el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$.

Lo haremos por reducción (Gauss)

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 & &\rightarrow & x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 3.\ (F_2 - 2F_1) & &\rightarrow & 5y - 3z &= 3. \\ x + y + z &= 6\quad (F_3 - F_1) & &\rightarrow & 2y \quad &= 6, \text{ de donde } \mathbf{y = 3.} \end{aligned}$$

De $5(3) - 3z = 3$, tenemos $12 = 3z$, luego **$z = 4$.**
De $x - (3) + (4) = 0$, tenemos **$x = -1$.**

Solución $(x,y,z) = (-1, 3, 4)$.

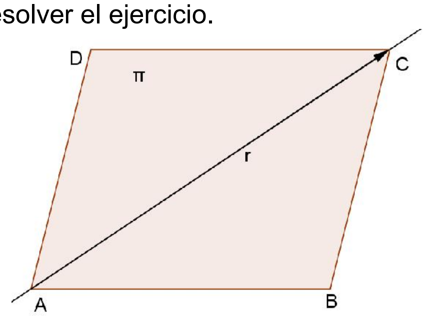
Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

Del paralelogramo ABCD se conocen los vértices A(-1,0,3), B(2,-1,1) y C(3,2,-3).
a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.
b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.
c) [0'5 puntos] Calcula las coordenadas del vértice D.

Solución

Del paralelogramo ABCD se conocen los vértices A(-1,0,3), B(2,−1,1) y C(3,2,-3).
a)
Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

La siguiente figura nos ayudará a resolver el ejercicio.



La ecuación del plano está determinada por un punto, el A(-1,0,3), y dos vectores independientes, el **AB** = (3,-1,-2) y **AC** = (4, 2,-6)

La ecuación paramétrica del plano es $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda + 4\mu \\ y = 0 \quad - \lambda + 2\mu \\ z = 3 \quad - 2\lambda - 6\mu \end{cases}$, con $\lambda, \mu \in R$.

b)
Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.

Para una recta "r" necesitamos un punto, el A(-1,0,3) y un vector director, el **u** = **AC** = (4, 2,-6).

La ecuación continua de la recta "r" es $\dfrac{x + 1}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z - 3}{-6}$

c)
Calcula las coordenadas del vértice D.

Como la figura ABCD es un paralelogramo, los vectores **AB** y **DC** son iguales.
AB = (3,-1,-2); **DC** = (3 - x,2 - y,-3 - z). De **AB** = **DC**, tenemos (3,-1,-2) = (3 - x,2 - y,-3 - z), e igualndo miembro a miembro:
$3 = 3 - x \rightarrow x = 0$
$-1 = 2 - y \rightarrow y = 3$
$-2 = -3 - z \rightarrow z = -1$.
El punto pedido es D(x,y,z) = (0,3,-1).

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

[2'5 puntos] Considera la función $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x = 1$.

Solución

Considera la función $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 es y + x = -3 y que el punto de inflexión tiene abscisa x=1.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Esta función es polinómica, por tanto continua y derivable las veces que sean que se necesiten en R.

Como x = 1 es un punto de inflexión, tenemos **f ''(1) = 0**.
Como la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 es y + x = -3, tenemos que en x = 0 la gráfica de f y la de la recta normal coinciden luego **f(0) = y(0) = -3.**
La pendiente de la recta normal en x = 0 es "-1/f'(0)"; pero la pendiente de la recta y = -x – 3, es y' = -1. Como son iguales tenemos "-1/f'(0) = -1", de donde **f'(0) = 1.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$.
De f ''(1) = 0, tenemos 6 + 2a = 0, por tanto **a = -3.**
De f '(0) = 1, tenemos 0 + 0 + b = 1, de donde **b = 1.**
De f (0) = -3, tenemos 0 + 0 + 0 + c = -3, por tanto **c = -3**

Los valores pedidos son a = -3, b = 1 y c = -3, y la función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

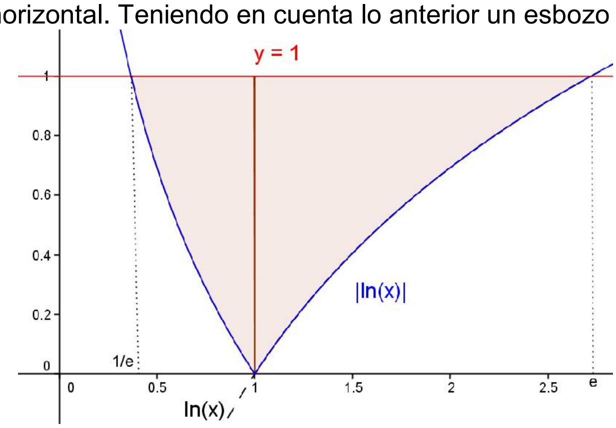
Sea g : (0, +∞) → R la función definida por g(x) = |ln(x)| (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta y = 1. Calcula los puntos de corte entre ellas.
b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto anterior.

Solución

Sea g : (0, +∞) → R la función definida por g(x) = |ln(x)| (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a)
Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta y = 1. Calcula los puntos de corte entre ellas.

Sabemos que la gráfica de |ln(x)| es exactamente igual que la de "ln(x) para ln(x) > 0 (la parte de la gráfica que está por encima del eje OX, en este caso para x ≥ 1 porque ln(1) = 0), y simétrica respecto al eje OX cuando ln(x) < 0 (la parte de la gráfica que está por debajo del eje OX, en este caso para x < 1).
Además sabemos que ln(1) = 0, ln(e) = 1, ln(x) es estrictamente creciente y que $\lim_{x \to 0-} \ln(x) = \ln(0^+) = -\infty$.

La recta y = 1 es una recta horizontal. Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica pedida es:



Los cortes entre ellas salen de resolver la ecuación |ln(x)| = 1, que son dos ecuaciones:
Ln(x) = 1, de donde $x = e^1 = e$ (por recíproca) y -ln(x) = 1 → ln(x) = -1, de donde $x = e^{-1} = 1/e$. **Los puntos de corte pedidos son (1/e,1) y (e,1).**
b)
Calcula el área del recinto anterior.

Área = $\int_{1/e}^{1} (1 - (-\ln(x))dx + \int_1^e (1 - (\ln(x))dx = \int_{1/e}^{1} (1 + \ln(x))dx + \int_1^e (1 - (\ln(x))dx = \{++\}$

Recordamos que $\int \ln(x)dx = x\cdot\ln(x) - x$, pues es una integral por partes $\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$.
$\int \ln(x)dx = \{ u = \ln(x) \to du = dx/x;\ dv = x \to v = \int dx = x \} = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot dx/x = x\cdot\ln(x) - \int dx = x\cdot\ln(x) - x$.
$\{++\} = [x + x\cdot\ln(x) - x]_{1/e}^{1} + [x - x\cdot\ln(x) + x]_1^e = [(1\cdot\ln(1)) - ((1/e)\cdot\ln(1/e)] + [(2(e) - e\cdot\ln(e)) - (2(1) - 1\cdot\ln(1)] =$
$= 0 - ((1/e)\cdot(-1) + 2e - e\cdot(1) - 2 + 0$ **$= e + 1/e - 2 \cong 1'0862\ u^2$**

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1'25 puntos] Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).
b) [1'25 puntos] Calcula Z tal que AZ = BZ + A.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)
Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).

$X - Y = A^t \quad \rightarrow \quad X - Y = A^t$
$2X - Y = B \quad (F_2 - F_1) \quad \rightarrow \quad$ **$X = B - A^t$**. Entrando en la 1ª $\rightarrow$ **$Y =$** $X - A^t = (B - A^t) - A^t =$ **$B - 2A^t$**.

$X = B - A^t$ $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$Y = B - 2A^t$ $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

b)
Calcula Z tal que AZ = BZ + A.

De AZ = BZ + A, tenemos AZ - BZ = A, luego $(A - B)\cdot Z = A$.
Como $A - B = C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, tiene matriz inversa C^{-1} porque det(C) = 2-+3 = 1 ≠ 0,

multiplicamo s la expresión $C\cdot Z = A$ por la inversa de C por la izquierda.
$C^{-1}\cdot C\cdot Z = C^{-1}\cdot A \rightarrow I\cdot Z = C^{-1}\cdot A \rightarrow$ **$Z = C^{-1}\cdot A$.**
Calculamos $C^{-1} = (1/|C|)\cdot Adj(C^t)$

$C^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; luego $C^{-1} = (1/|C|)\cdot Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

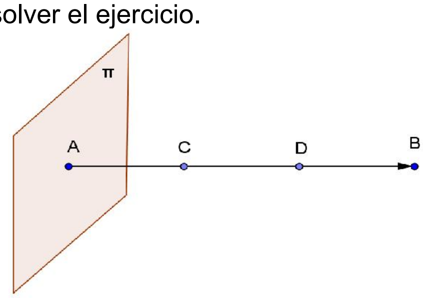
$Z = C^{-1}\cdot A$ $= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **=** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

Considera los puntos A(1,2,3) y B(−1,0,4).
a) [1'25 puntos] Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.
b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

Solución

Considera los puntos A(1,2,3) y B(−1,0,4).
a)
Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.
La siguiente figura nos ayudará a resolver el ejercicio.



Tenemos que **AB** = 3**AC**, de donde (-2, -2, 1) = 3(x-1, y-2, z-3) = (3x - 3,3y - 6,3z - 9). Igualando tenemos:
$-2 = 3x - 3 \rightarrow 1 = 3x \rightarrow x = 1/3$.
$-2 = 3y - 6 \rightarrow 4 = 3y \rightarrow y = 4/3$.
$1 = 3z - 9 \rightarrow 10 = 3z \rightarrow z = 10/3$.
El punto C es **C(x,y,z) = (1/3, 4/3, 10/3).**
Para calcular el punto D(x,y,z) tenemos en cuenta que D es el punto medio del segmento CB, por tanto:
D(x,y,z) = ((1/3 – 1)/2, (4/3)/2, (10/3 + 4)/2) = (-1/3, 2/3, 11/3) **= (-1/3, 2/3, 11/3).**
b)
Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.
Si observamos la figura vemos que el plano π está determinado por el punto A(1,2,3) y el vector normal

n = **AB** = (-2,-2,1), por tanto π ≡ **AX•n** = 0 = (x-1,y-2,z-3)•(-2,-2,1) = -2x+2-2y+4+z-3 **= -2x-2y+z+3 = 0.**